Test auf Weibull-Verteilung

Allgemein können Daten dahingehend geprüft werden, ob sie einer bestimmten Verteilungen gehorchen. Zu beachten ist bei der Weibull-Verteilung, dass diese eine universelle Verteilung ist, die andere (z.B. Lognormal-Verteilung) beinhaltet.

Im Kolmogorov-Smirnov Test werden die vorhanden Daten (empirischen) gegen die Weibull-Verteilungs Funktion verglichen. Die Parameter b, T und evtl. t_o dieser Funktion werden jedoch aus den vorliegenden Daten geschätzt (siehe Kapitel Bestimmung der Weibull-Parameter).

Betrachtet man statt der Zufallsvariablen T mit der Funktion:

$$H = 1 - e^{-\left(\frac{t-to}{T-to}\right)^{b}}$$

die Zufallsvariable:

$$X = \left(\frac{t-t_o}{T-t_o}\right)^{b}$$

so ist diese exponentialverteilt mit:

$$H = 1 - e^{-X}$$

Aufgrund dieser Überlegung kann der Kolmogorov-Smirnov Test (kurz KS-Test) für die Exponentialverteilung mit unbekanntem Parameter herangezogen werden. Es wird überprüft, ob die hypotetische Verteilungsfunktion $H_{(X)}$ der tatsächlichen Verteilung entspricht. Die Nullhypothese lautet:

Ho : Die Verteilung ist weibullverteilt

Verglichen werden die Abweichung gegenüber den Häufigkeiten der sortierten Daten (Rangfolge). Verglichen werden die Abweichung gegenüber den Häufigkeiten der sortierten Daten (Rangfolge i). Für $n \geq 50$ gilt: $H=i/(n+1)$. Da die empirischen Daten eine „Treppenfunktion“ ist, muß neben der Stelle i auch noch die Abweichung an der vorhergehenden Stelle i-1 gegenüber dem Funktionswert H_i geprüft werden.

Die Hypothese wird nicht abgelehnt, wenn ein maximaler Abstand D zwischen der empirischen Häufigkeit und der Weibull-Funktion nicht überschritten wird.

$$D = \max\left[\left|\left(\frac{i-0{,}3}{n+0{,}4}\right) - \left(1-e^{-\left(\frac{t-t_o}{T-t_o}\right)^b}\right)\right|, \left|\left(\frac{i-1-0{,}3}{n+0{,}4}\right) - \left(1-e^{-\left(\frac{t-t_o}{T-t_o}\right)^b}\right)\right|\right] \quad \text{für} \quad n < 50$$

$$D = \max\left[\left|\left(\frac{i}{n+1}\right) - \left(1-e^{-\left(\frac{t-t_o}{T-t_o}\right)^b}\right)\right|, \left|\left(\frac{i-1}{n+1}\right) - \left(1-e^{-\left(\frac{t-t_o}{T-t_o}\right)^b}\right)\right|\right] \quad \text{für} \quad n \geq 50$$

Die kritischen Werte für D aus herkömmlichen Tabellen sind nur geeignet, wenn der Parameter der Exponentialverteilung bekannt ist. Lilliefors /16/ ermittelte unter Verwendung von Monte-Carlo-Methoden kritische Werte für den Fall, dass der Parameter aus der Stichprobe geschätzt werden muß. Der Vorteil des KS-Tests ist, dass er auch auf kleine Stichproben angewendet werden kann. Allerdings werden auch vollständige Stichproben vorausgesetzt.

Beispiel: Es liegen folgende Ausfalldaten vor, bei den t_o = 0 ist. Die Weibull Parameter wurden über die Methode der Ausgleichsgerade bestimmt und sind T=56,45 und b=1,4.

i	t	$\frac{i-0{,}3}{n+0{,}4}$	$1-e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$	Δ an i	Δ an $i-1$
1	13	0,10938	0,12050	0,011	0,121
2	24	0,26563	0,26108	0,005	0,152
3	31	0,42188	0,35127	0,071	0,086
4	55	0,57813	0,61885	0,041	0,197
5	78	0,73438	0,79238	0,058	0,214
6	91	0,89063	0,85774	0,033	0,123

D_{max} ist somit 0,214. Der kritische Wert für ein Signifikanzniveau von α = 5% ist nach Tabelle (siehe Anhang) $KS_{\text{krit } 6{,}5\%}$ = 0,408. Da $D_{max} < KS_{\text{krit } 6{,}5\%}$ ist wird die Hypothese, dass eine Weibullverteilung vorliegt, bestätigt.

Liegt keine Weibullverteilung vor, muss man nach den möglichen Ursachen suchen. Die Darstellung der Ausfallhäufigkeiten im Weibull-Netz ist deshalb nicht falsch, es darf aber nicht mit den ermittelten Parametern auf andere Ausfallwerte geschlossen, oder extrapoliert werden.