Weibull-Doppeltexponential

Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Weibull-Verteilung. Weiterführende und verwandte Themen sind:

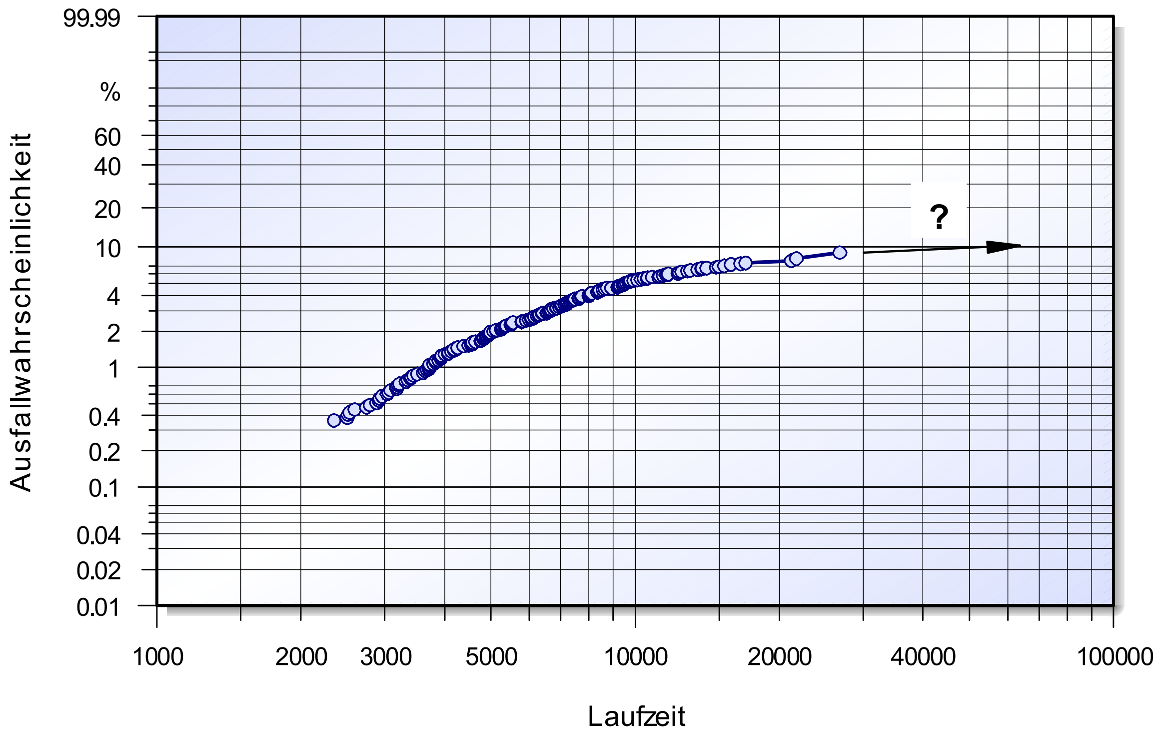
www.weibull.de/Weibull-Analysen.pdf

www.weibull.de/Weibull_Leitfaden_Feldauswertungen.pdf

Stichworte: Weibull – Doppeltexponential – Nichtlinear – Ausfallwahrscheinlichkeit – 3-parametrige Weibull-Verteilung – Feldauswertung

Einführung

Oft haben Ausfälle im Weibull-Netz, insbesondere bei Langzeitbetrachtungen, einen rechts gekrümmten Verlauf. Die 3-parametrige Weibull-Verteilung weist zwar einen gekrümmten Verlauf auf, aber mehr im Anfangsbereich. Im Feld (Kundenbetrieb) gibt es meist einen abflachenden Verlauf zu höhreren Nutzungszeiten (hier km).



Ziel und Nutzen

In der folgenden Beschreibung wird ein neuer Ansatz einer Weibull-Verteilung gemacht, mit der häufig auftretende Ausfallverläufe im Feld besser beschrieben werden können. Hiermit ist ein Extrapolieren zu langen Laufzeiten möglich, um z.B. Ersatzteilbedarfe oder Kosten errechnen zu können.

Grundlagen

Die Weibull-Verteilung ist allgemein definiert durch Gleichung 1.

$$H = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}}$$

Glg. (1)

© 2021 CRGRAPH

Hierin ist b die Steigung und T die sogenannte charakteristische Lebensdauer T. Mit Hilfe der 3-parametrigen Form und dem Parameter t_o wird eine ausfallfreie Zeit meist mit Verschleißverhalten in Zusammenhang gebracht (Glg. 2).

$$H = 1 - e^{-\left(\frac{t-to}{T-to}\right)^b}$$ Glg. (2)

Hiermit ist ein rechtsgekrümmter Verlauf der Ausfallpunkte im Weibull-Netz möglich. Es hat sich aber in zahlreichen Auswertungen gezeigt, dass anstelle der 3-parametrigen Weibull-Verteilung der Kurvenverlauf im Weibull-Netz oft besser durch einen Exponential-Ansatz beschreibbar ist. Dieser hat über dem gesamten Bereich eine relativ gleichmäßige Krümmung. Die 3-parametrige Form weist im unteren Bereich dagegen eine eher stärkere Krümmung auf, die im Auslauf nach oben fast in eine Gerade übergeht.

Zunächst soll auf die Bestimmung der Weibull-Parameter eingegangen werden um die weiteren Schritte erklären zu können. Die klassische Art der Bestimmung der Weibull-Parameter erfolgt durch die Bildung einer Ausgleichsgeraden im logarithmischen Weibull-Netz. Allgemein ist die Ausgleichsgerade durch Glg. 3 definiert:

$$Y = bX + a$$ Glg. (3)

Durch Umstellen der Weibull - Gleichung 1 nach t kommt man zu den folgenden Termen, die durch X und Y substituiert werden, um die Ausgleichsgerade zu erhalten:

$$\underbrace{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-H}\right)\right)}_{Y} = \underbrace{b\ln(t)}_{X} - \underbrace{b\ln(T)}_{a}$$ Glg. (4, 5)

Im 3-parametrigen Ansatz wird die Laufzeit um t_o nach links verschoben (abgezogen) und man erhält statt Glg. 4 dann Glg. 6.

$$X = \ln(t - to)$$ Glg. (6)

Mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wird aus X und Y dann die Ausgleichsgerade gebildet. Für einen gekrümmten Verlauf der Ausfallpunkte gibt es verschiedene Möglichkeiten, andere Ansätze zu verwenden. In vielen Auswertungen hat sich folgender Exponentialansatz als sehr geeignet herausgestellt:

$$Y' = \alpha \cdot e^{\varphi X}$$ Glg. (7)

Mit diesem Ansatz lassen sich nichtlinearen Verläufe, insbesondere annähernd gleichmäßig gekrümmte, ideal abbilden. Konkrete Ausfälle, wie in Bild 1 dargestellt, zeigen gerade einen solchen Verlauf.
Diese Funktion nach Gleichung 7 ist allerdings zunächst links- statt rechtsgekrümmt. Die Transformation erfolgt deshalb günstiger weise mit:

$$Y' = -\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-H}\right)\right) + \tau$$ Glg. (8)

und dem Offset $\tau = Y[n_a]$ für den letzten Ausfallpunkt n_a. Hiermit erreicht man, dass die

© 2021 CRGRAPH

Punkte um die X-Achse herum gespiegelt werden und die Funktion rechtsgekrümmt ist.

Setzt man nun X und Y' in die Exponentialgleichung 7 ein, so entsteht letztlich Glg. 9:

$$H = 1 - e^{-e^{-\left(\alpha\, e^{\varphi \ln(t)} - \tau\right)}}$$ Glg. (9)

Fast man den Exponenten zu x zusammen, so entspricht diese neue Form der in Fachkreisen bekannten Extremwertverteilung Typ I nach Gumble /5/:

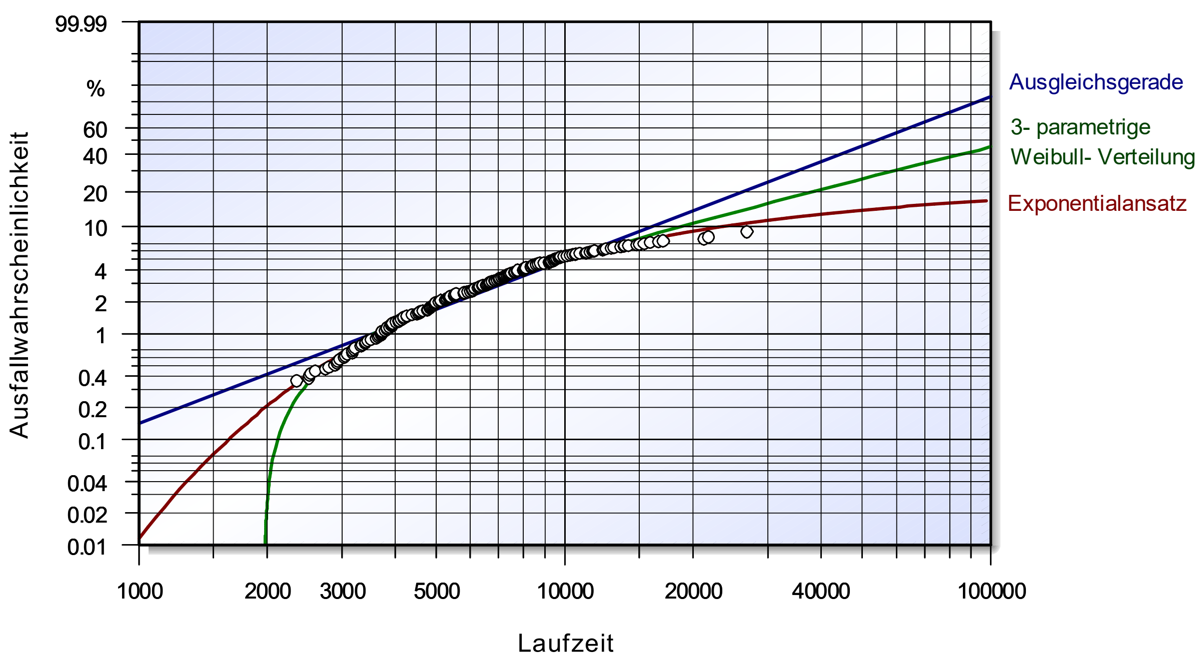
$$H = 1 - e^{-e^{-x}}$$ Glg. (10)

Die entsprechende Umkehrfunktion von Glg. 9 lautet:

$$t = e^{\frac{1}{\varphi}\ln\left(\frac{\tau - \ln(\ln(1/(1-H)))}{\alpha}\right)}$$ Glg. (11)

Hiermit kann z.B. der B10 - Wert ausgerechnet werden, für H = 0,10 = 10% Ausfälle.

Folgendes Beispiel (Bild 2) zeigt die Unterschiede anhand eines konkreten Ausfallverhaltens:

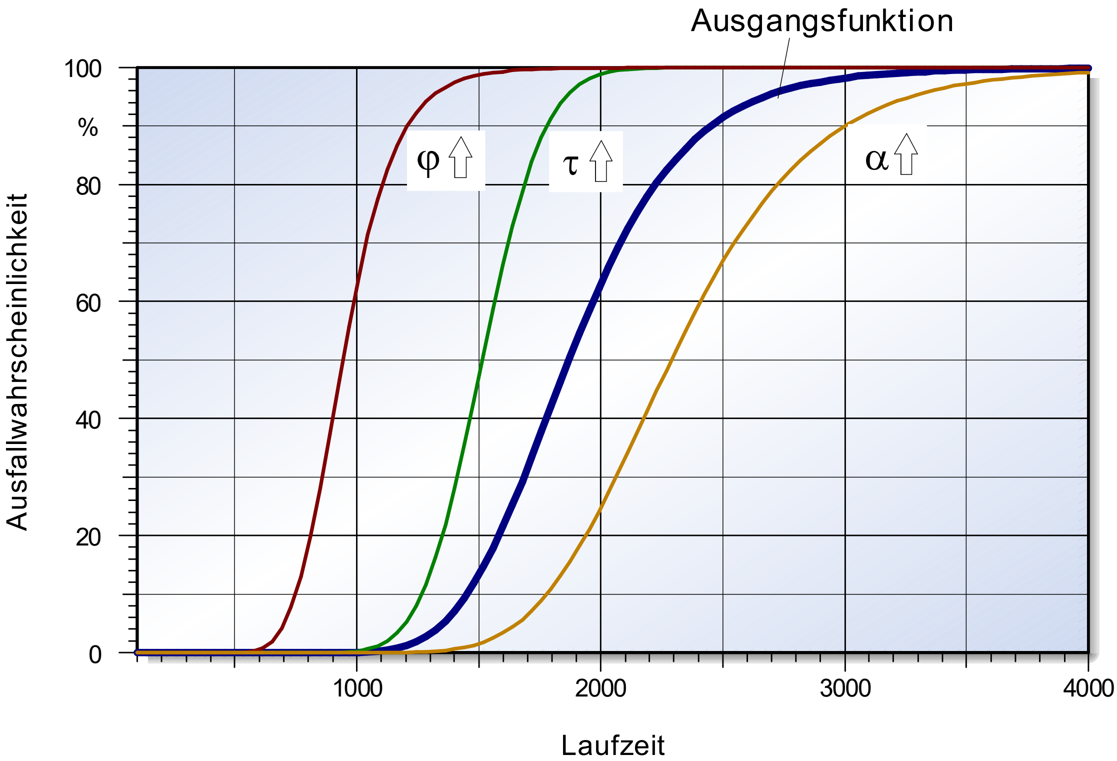


Die klassische Ausgleichsgerade liefert die schlechteste Beschreibung der Ausfälle, insbesondere ab 10.000 km. Die 3-parametrige Weibull-Verteilung mit der ausfallfreien Zeit t_0 ist schon deutlich besser, zeigt aber im Auslauf der letzten Ausfallpunkte immer noch zu große Abweichungen. Eine Aussage über die Ausfallwahrscheinlichkeit z.B. bei 100.000 km würde viel zu hohe Werte liefern. In diesem Fall wären ca. 45% Ausfälle zu erwarten gewesen. Diese haben sich später aber nicht eingestellt.
Erst der Exponentialansatz war zufriedenstellend. Das Ergebnis wurde noch besser, wenn man für die Bestimmung der Weibull-Funktion nur die hinteren oberen Punkte

© 2021 CRGRAPH

verwendete (ca. 2/3 der Gesamtanzahl). Frühausfälle im ganz vorderen Bereich sind bereits aus der Darstellung herausgenommen worden (Prozessfehler).

Der Weibull-Exponentialansatz zeigt keine charakteristische Ausfallzeit T oder Steigung b die zu interpretieren wäre. α, φ und τ sind entsprechend nur Form- und Lageparameter dieser Funktion. Bild 3 zeigt, welche Wirkung die Veränderung der 3 Parameter im linearen Maßstab mit sich bringt. Eine Vergrößerung von α gegenüber der Ausgangsfunktion verschiebt die Kurve nach rechts. Dies ist vergleichbar mit dem Verhalten, wenn T in der 2-parametrigen Weibull-Funktion vergrößert wird. Allerdings verschieben auch φ und τ die Kurve. Eine Vergrößerung der jeweiligen Werte ergibt hier eine Linksverschiebung, wobei der Verlauf zusätzlich steiler und stärker gekrümmt wird.



Wann entscheidet man sich für diesen Ansatz? Die Anpassung der erzeugten Kurve an die Ausfallpunkte wird zunächst optisch beurteilt. Passt der gleichmäßig gekrümmte Verlauf zu den Punkten, so entscheidet man sich mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten aus dem Ansatz der kleinsten Fehlerquadrate /4/ zwischen der 3-parametrigen Weibull-Verteilung oder dem Exponentialansatz. Je näher der Korrelationskoeffizient an 1 liegt, desto besser ist die Funktion geeignet. Zur Anpassung der Funktion an konkrete Ausfallpunkte ist es evtl. sinnvoll nicht zum Kurvenverlauf passende Anfangspunkte (Frühausfälle) und extreme Endpunkte auszusparen.

Dieser Ansatz empfiehlt sich also, wenn die Ausfallpunkte, zumindest im mittleren Bereich, stetig und gleichmäßig rechtsgekrümmt sind. Gibt es Mischerteilungen, oder mehrfach gekrümmte Verläufe, so ist die Methode zur Bestimmung einer Mischverteilung nach Ronniger /2/ oder der Ansatz nach Bracke/Haller /3/ eine Alternative.

© 2021 CRGRAPH

Literatur:

/1/ Ronniger, C.
Zuverlässigkeitsanalysen mit Weibull in Entwicklung und Serie.
ATZ (1999) 11, S. 942

/2/ Ronniger, C.
Zufällig oder systematisch?
Die Bestimmung von Mischverteilungen im Weibull-Netz
QZ 05/2000

/3/ Bracke, S.; Haller, S :Prävention durch Präzision
QZ 7/2009

/4/ Statistik
Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik
Hartung, Elpelt, Klösner
Oldenburg Verlag München Wien
ISBN 3-486-24984-3

/5/ Taschenbuch der Zuverlässigkeits- und Sicherheitstechnik
Arno Meyna / Bernhard Pauli
Hanser Verlag München Wien
ISBN 3-446-21594-8

/6/ Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden
Curt Ronniger
CRGRAPH
ISBN 978-3-00-043678-9

/7/ Weibull & Zuverlässigkeitsmethoden (e-Book)
Curt Ronniger
CRGRAPH

© 2021 CRGRAPH

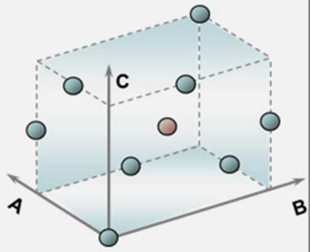
Weiterführende Beschreibungen

Ausführliche softwareunabhängige Beschreibungen zum Thema DoE und der dazugehörigen Auswertungen gibt es im

Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden

Definitive Screening Designs DSD

Sogenannte Definitive Screening Designs sind sehr neu von Jones und Nachtsheim entwickelte Versuchspläne mit sehr geringem Versuchsumfang.
Sie ermöglichen die Auswertung von quadratischen Modellen und basieren deshalb auf 3 Stufen. Zwischen den Hauptfaktoren untereinander und den quadratischen Termen gibt es keine Vermengung (orthogonal). Die Wechselwirkungen sind nicht zu 100% vermengt.



Nr	A	B	C	D
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	-1	0	-1	1
4	1	0	1	-1
5	-1	-1	0	-1
6	1	1	0	1
7	-1	1	1	0
8	1	-1	-1	0
9	0	0	0	0

In der generischen Erzeugung dieser Versuchspläne (iterativ mit Hilfe der Determinante) ergibt sich regulär die Anzahl Versuche mit n = 2*p+2. Manche Pläne, z.B. für p=5 sind dann allerdings teilweise zwischen den Hauptfaktoren vermengt. Hier müssen bis zu 3 Versuchszeilen ergänzt werden. Der Gesamtumfang ergibt sich somit zu:

n = 2*p+2+(1..3)

Alle Faktoren müssen durchgehend auf 3 Stufen sein und es lassen sich keine kategorialen Faktoren darstellen. Nachteilig ist auch, dass keine Auswertung aller möglichen

Weitere Informationen und Leseproben:
crgraph.de/Literatur

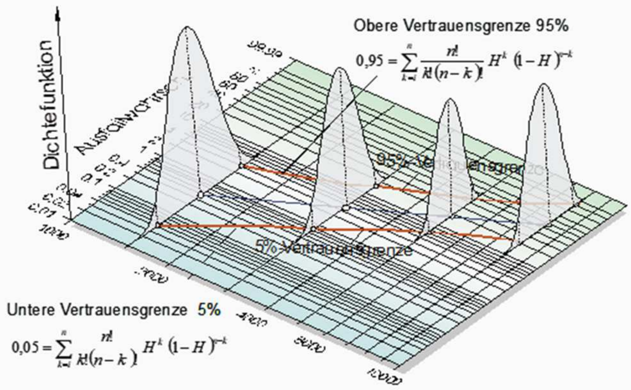
Speziell das Buch

Weibull & Zuverlässigkeitsmethoden

vertieft anwendungsbezogen die Statistiken und Methoden rund um Weibull und aller weitere Verteilungen. Die Versuchsplanung behandelt hier spezielle Lebensdauerfragen aufgrund unterschiedlicher Belastungen, Temperaturen, etc.

2.5.1 Vertrauensbereich der Weibull-Gerade

Bei der Weibull-Auswertung handelt es sich praktisch immer um eine Stichprobe. Die Gerade im Weibull-Diagramm entspricht also nur der Stichprobe. Je mehr Teile geprüft oder ausgewertet werden, desto mehr streuen die „Punkte" um die Weibull-Gerade. Man kann statistisch eine Abschätzung über den Bereich der Grundgesamtheit machen. Hierfür wird ein sogenannter „Vertrauensbereich" eingeführt. In der Regel gibt man diesen mit 90% an. Die obere Vertrauensgrenze entspricht dann einer Aussagewahrscheinlichkeit von P_A=95%.



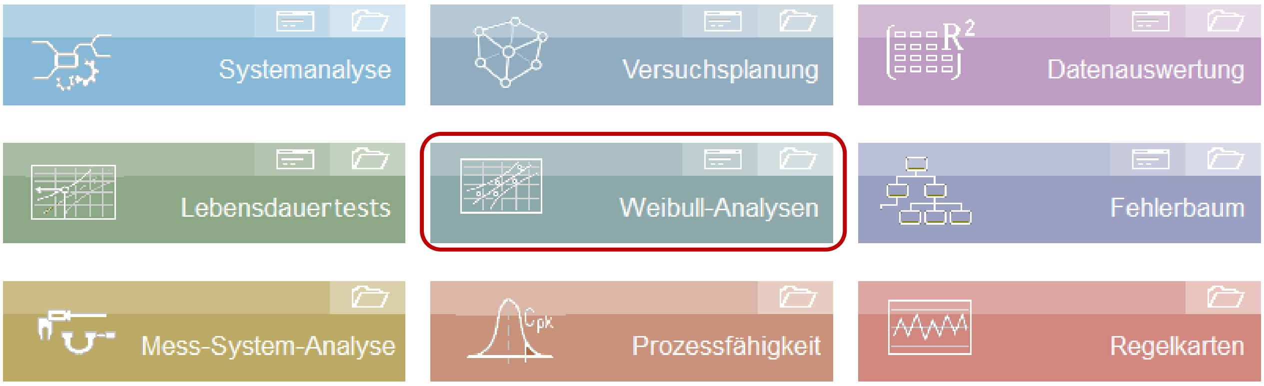
Weitere Informationen und Leseproben:
crgraph.de/Literatur

© 2021 CRGRAPH

Weibull-Doppeltexponential

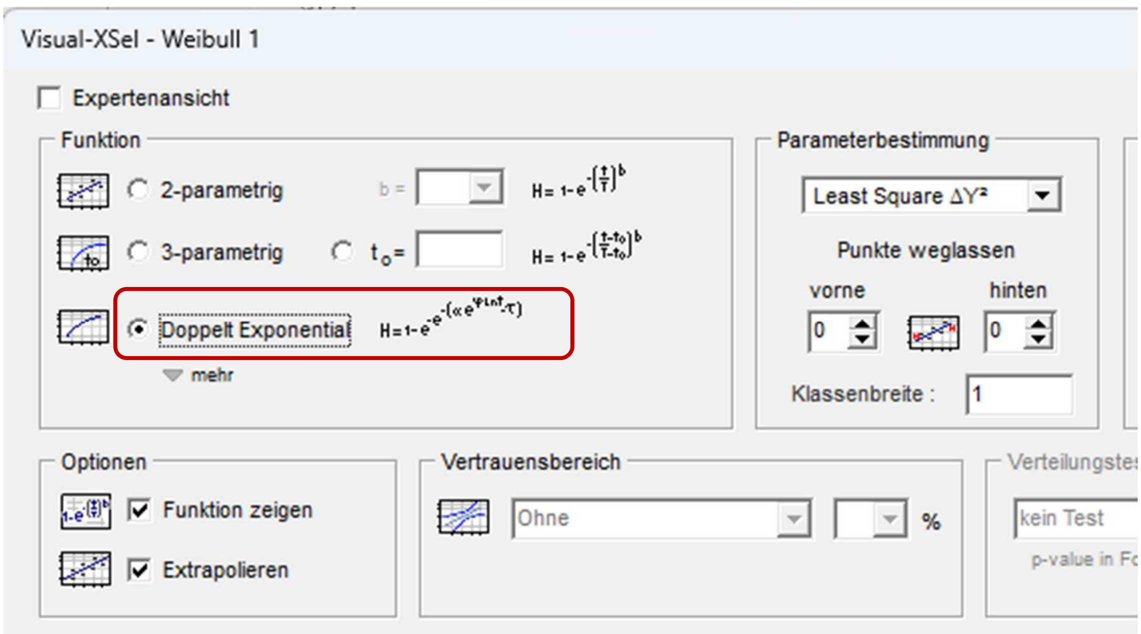
Anwendung in Visual-XSel
www.crgraph.de

Verwenden Sie für den Einstieg die Datenauswertung im Leitfaden,



oder die Ikone Weibull….

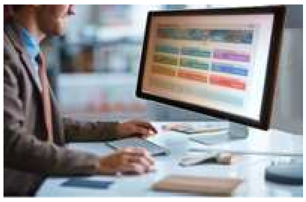
Der Leitfaden zu Weibull ermöglicht eine schnelle Auswahl von Grafiken und Methoden. Je nachdem, was gegeben ist, erweitert sich die Dialogbox um weitere Spalten:



© 2021 CRGRAPH

Software – Literatur – Consulting – Schulungen

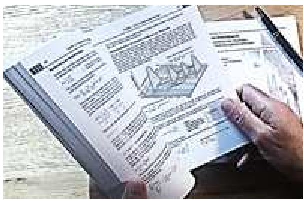
Software



Unsere Software **Visual-XSel** ist ein leistungsfähiges Tool für alle wichtigen statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden. Nicht umsonst ist diese Software in vielen namhaften Firmen im Einsatz – crgraph.de/Referenzen.

Weitere Informationen zum aktuellen Thema finden Sie auf den nächsten Seiten oder unter crgraph.de/Versionen

Eigene Literatur



Unsere **Taschenbücher der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden** beinhalten aktuelle und weiterführende Themen, z.B. zu Systemanalysen, Versuchsplanung und Datenauswertung, sowie zur Mess-System-Analyse und Prozessfähigkeit, Weibull- und Zuverlässigkeitsmethoden (neutral und softwareunabhängig).

Weitere Informationen finden Sie unter crgraph.de/Literatur

Consulting & Schulungen & Six Sigma

Bei unseren Inhouse- oder Online-Schulungen wird die praxisnahe Anwendung von statistischen Methoden vermittelt. Wir haben über 20 Jahre Erfahrung, insbesondere in der Automobilindustrie und unterstützen Sie bei Ihren Problemstellungen, führen Auswertungen für Sie durch, oder erstellen firmenspezifische Auswertevorlagen.

Weitere Informationen finden Sie unter crgraph.de/Schulungen

Hotline

Haben Sie noch Fragen, oder Anregungen? Wir stehen Ihnen gerne zur Verfügung:

Tel. +49 (0)8151-9193638

email: info@crgraph.de

Besuchen Sie uns auf unserer Home-Page: www.crgraph.de

© 2021 CRGRAPH