Lognormalverteilung

Die Lognormalverteilung ist eine einseitig schiefe Verteilung, die nur positive Werte aufweist. Eine anschauliche Erklärung, dass sich ein Merkmal nicht symmetrisch verteilt ist, dass das Merkmal einen bestimmten Schrankenwert nicht unter- bzw. überschreiten kann. Ein markantes Beispiel ist die Verteilung von Zeiten, die nicht negativ werden können. Besonders dann, wenn die Verteilung links durch den Wert 0 begrenzt ist, kommt man durch Logarithmieren zu annähernd normalverteilten Werten! Die Entstehung eine Lognormalverteilung kann auch darauf zurückgeführt werden, dass viele Zufallsgrößen multiplikativ zusammenwirken.

Das Ausfallverhalten von Bauteilen in der klassischen Betriebsfestigkeit (z.B. Biegewechselbeanspruchung und Fehlerbild Riß/Bruch), wir in der Regel am besten durch die Lognormalverteilung beschrieben. Außerdem sind z.B. Laufstrecken-verteilungen von Fahrzeugen in der Regel lognormalverteilt.

Die Summenkurve ist das Integral der Wahrscheinlichkeitsdichte. Für die Lognormal-verteilung gilt:

$$H = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln(x) - \bar{x})^2}{2s^2}}$$

Im Gegensatz zu vielen anderen Verteilungen ist die Lognormalverteilung nicht als Sonderfall in der Weibull-Verteilung enthalten. Sie lässt sich aber näherungsweise mit der 3-parametrigen Weibull-Verteilung approximieren.

Dargestellt wird die Lognormalverteilung, wie die Summenhäufigkeit, durch das Integral der Dichtefunktion. Anstelle des Mittelwertes und der Standardabweichung hat bei der Lognormalverteilung der Medianwert und der Streufaktor seine Bedeutung. Den Medianwert erhält man durch das Lot des Schnittpunktes der 50% Summenhäufigkeit mit der Ausgleichsgerade auf die X-Achse, oder analytisch durch:

$$\log x_{50\%} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \log(x[i])\right)$$

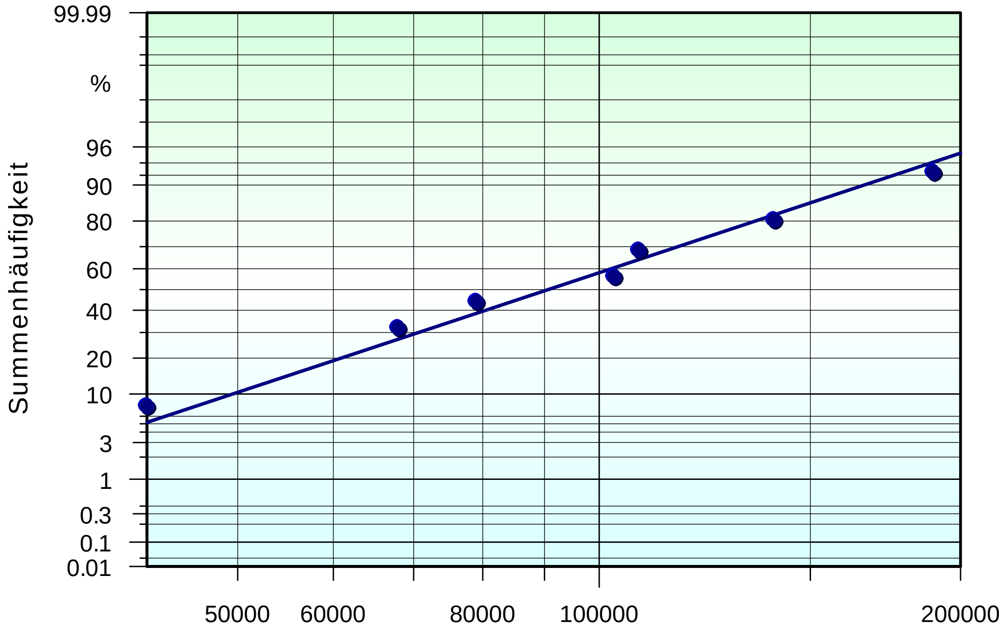
Median = $10^{\log x_{50\%}}$

Log. Standardaweichung

$$s_{\log} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\log(x_i) - \log(x_{50\%})\right)^2}$$

Streufaktor = $10^{s_{\log}}$

Die Schnittpunkte mit der 16% und 84% Summenhäufigkeit entsprechen nicht den Bereich für $\bar{x}$ $\pm$ s, wie für die "normale" Summenhäufigkeit, sondern den Bereich für *Median / Streufaktor* und *Median * Streufaktor*.



Häufig wird anstelle von 16% und 84% der Bereich zwischen 10% und 90% dargestellt. Dieser ergibt sich aus:

$x_{10\%} = x_{50\%} \; / \; 10^{1{,}28155 \cdot s_{\log}}$ und $x_{90\%} = x_{50\%} \cdot 10^{1{,}28155 \cdot s_{\log}}$

wobei 1,28155 die Quantile der Standardnormalverteilung für 10% ist.

Bei der analytischen Bestimmung der Geraden wird diese ausschließlich aus den Median und dem Streufaktor bebildet. Optisch können die Punkte je nach Häufigkeitswerte deshalb teilweise einseitig liegen.

Diese Abweichungen lassen sich mit einem Korrekturfaktor nach Hück

$k = \sqrt{\dfrac{n - 0{,}41}{n - 1}}$

verringern

$x'_{10\%} = x_{50\%} \; / \; 10^{1{,}28155 \; k \cdot s_{\log}}$ und $x'_{90\%} = x_{50\%} \cdot 10^{1{,}28155 \cdot k \cdot s_{\log}}$

Die Gerade wird hierdurch entsprechend flacher.

Die Häufigkeiten der einzelnen Punkte werden nach Rossow empfohlen:

$H = \frac{3i-1}{3n+1} \cdot 100\%$ für $n \leq 6$ und $H = \frac{i-0{,}375}{n+0{,}25} \cdot 100\%$ für $n > 6$

mit i = Ordnungszahl der sortierten X-Werte

Sind die Häufigkeiten in Prozent bereits vorgegeben, so ist die Bestimmung der Geraden nur über die Methode der Ausgleichsgerade mit linearisierten Punkten möglich.

Weibull-Funktion

Die Dichtefunktion der Weibull-Verteilung lautet:

$$h = \frac{b}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}}$$

mit

h = Wahrscheinlichkeitsdichte für „Zeitpunkt“ t
t = Lebensdauervariable (Fahrstrecke, Einsatzdauer, Lastwechsel usw.)
T = Charakteristische Lebensdauer, bei der in Summe 63.2% der Einheiten ausgefallen sind
b = Formparameter, Steigung der Ausgleichsgeraden im Weibull-Netz

Für verschiedene Werte des Formparameters b und einem normierten T=1 ergibt sich foldender Verlauf: